Un flocon dans la tempête !

Hirïnkael

10 mars 2004

Résumé

Le but de cette étude est de proposer une modélisation physique d'un flocon perdu dans une tempête de neige et d'en décliner des modèles comportementaux plus adaptés aux traitements algorithmiques. Concrètement, il s'agit de simuler une immense scène animée représentant les flocons en pleine chorégraphie ! Nous[1] montrons en particulier comment l'introduction d'un espace torique permet d'y parvenir à moindre frais.

1 Introduction

L'étude directe d'un flocon dans une tempête étant fort compliquée, nous avons choisi de nous intéresser dans un premier temps à la modélisation du flocon par temps calme. Nous proposons ensuite quelques méthodes pour générer à partir de là des flocons ballotés par les vents rageurs d'une tempête !

2 Dynamique par temps calme

2.1 Présentation

Les plus observateurs d'entre vous l'auront remarqué, même en l'absence de vent notable les flocons s'obstinent à ne pas tomber droit. Cela montre à l'évidence que la dynamique du flocon par temps calme constitue déjà une source abondante de difficultés. L'objectif de cette partie est de s'appuyer sur une étude physique classique pour construire un schéma comportemental du flocon non harcelé par l'ami Eole.

2.2 Modélisation physique

2.2.1 Equations continues

Dans toute l'étude, nous supposerons le flocon assimilable à un point. Bien qu'éminemment discutable, cette hypothèse a le bon goût de simplifier grandement les équations et de nous laisser l'espoir d'obtenir en bout de course des

[1] Oui, je parle de moi au pluriel : je deviens schizophrène et mégalo !

algorithmes un tant soit peu exploitables en pratique. Il va sans dire que nous nous limiterons au cadre de la mécanique newtonienne et que le repère d'étude sera choisi galiléen. Notons $\overrightarrow{v}$,v et m, respectivement la vitesse du flocon, la norme de sa vitesse et sa masse. Les forces en présence sont :

- le poids $m\overrightarrow{g}$,
- le frottement de l'air $\alpha(v)\overrightarrow{v}$,
- la perturbation éolienne, $\overrightarrow{\varepsilon}$, considérée comme aléatoire et modélisant les légers courants d'air qui donnent à la danse du flocon son caractère si délicieusement voluptueux !

Si nos souvenirs sont bons, le frottement de l'air se modélise volontiers par une fonction α linéaire. Le frottement le plus populaire, car le plus simple, correspond au cas où α est une fonction constante. Dans le doute, nous considèrerons la classe des fonctions $\alpha = \lambda + \mu v$ affines.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\overrightarrow{g} - \alpha(v)\overrightarrow{v} + \overrightarrow{\varepsilon} \tag{1}$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} m \text{ est la masse du flocon} \\ \vec{v} \text{ sa vitesse} \\ \overrightarrow{g} \text{ l'attraction gravitationnelle} \\ \alpha \text{ une fonction affine de la vitesse} \\ \overrightarrow{\varepsilon} \text{ une perturbation due au vent résiduel} \end{cases}$$

On remarque donc que lorsque α n'est pas constante le problème n'est pas linéaire en fonction de $\overrightarrow{v}$, ce qui est très pénible.

2.2.2 Equations discrètes

La nature aléatoire de la perturbation $\overrightarrow{\varepsilon}$ pose d'épineux problèmes mathématiques quant à l'interprétation de l'équation dynamique (1). Le meilleur moyen de leur tordre le cou consiste à discrétiser l'évolution du flocon avec un pas de temps un pas de temps ΔT destiné à tendre vers zéro. Le schéma de discrétisation standard donne :

$$\overrightarrow{v}_{k+1} = \overrightarrow{v}_k + \Delta T\left(\overrightarrow{g} - \frac{1}{m}\alpha(v_k)\overrightarrow{v}_k\right) + \frac{\sqrt{\Delta T}}{m}\overrightarrow{\varepsilon}_k \tag{2}$$

où $\overrightarrow{\varepsilon}_k$ est un vecteur gaussien caractérisé par $\overrightarrow{\varepsilon}$

A chaque fois que les notations différentielles se révèleront délicates d'emploi, nous reviendrons sans état d'âme à l'équation dynamique discrète (2) et nous en étudierons la limite quand ΔT tend vers zéro.

2.3 Modélisation comportementale

L'objet de cette partie est de voir comment traduire de manière réaliste le comportement du flocon en termes mathématiques. Nous proposons pour chaque élément à modéliser (frottements, poids, perturbations, initialisation des paramètres cinématiques...) un certain nombre de modèles, des plus simples aux plus compliqués.

2.3.1 La force de frottement

Généralités Nous avons déjà dit que la force de frottement devrait être modélisable de manière satisfaisante dans la classe affine. Si les simulations tendent à montrer que la classe des fonctions constantes fournit déjà une modélisation acceptable alors il serait préférable de reprendre l'étude théorique est d'exploiter pleinement la linéarité des équations.

Simulation d'un modèle non ponctuel Afin de donner une impression

de volume à nos flocons, nous pourrions considérer une force de frottement un peu plus complexe. On peut en effet se représenter le flocon comme une objet vaguement plat. La résistance de l'air α étant a peu près proportionnelle à la surface exposée au souffle, il va de soi que les paramètres λ et μ de α diffèreront sensiblement selon que le flocon se présente de face ou de profil. Une première idée consisterait à gérer cet aspect des choses en attribuant à λ et à μ un comportement aléatoire. Une autre, plus raffinée, pourraît être de moduler la force de frottement nominale en fonction du changement d'orientation du vent. Cela pourrait par exemple s'écrire :

$$\alpha(v_k) = (\lambda + \mu v_k) \frac{1}{v_k v_{k-1}} \overrightarrow{v}_k . \overrightarrow{v}_{k-1}$$

2.3.2 La perturbation éolienne

Généralités C'est très clairement le point délicat de la modélisation. Il est

censé rendre compte de toutes les micro-perturbations de l'atmopshère : agitation thermique, mouvements convectifs erratiques, etc. En gros, c'est lui qui va faire que le flocon simulé, à l'instar de son homologue réel, ne tombera pas droit. Mathématiquement, on peut le modéliser par un processus stochastique. Cela n'est évidemment pas sans soulever un certain nombre de questions passionnantes, questions auxquelles je vais tenter de répondre dans les sections suivantes.

Quelle nature mathématique pour la perturbation ? Le choix que j'en-

trevois ici est double :

1. $\overrightarrow{\varepsilon}$ est un simple processus stochastique temporel,
2. $\overrightarrow{\varepsilon}$ dérive d'un champ spatial.

Le premier cas est le plus simple. $\overrightarrow{\varepsilon}$ y est un processus tridimensionnel dépendant uniquement du temps. Conceptuellement, il a la nature d'un bruit. Le paragraphe suivant discute des différentes manières de modéliser cette notion de bruit.

Processus stochastique temporel simple Nous nous intéressons ici au cas où la perturbation $\overrightarrow{\varepsilon}$ est grossièrement modélisée par un processus temporel tridimensionnel. Typiquement, la démarche classique consisterait à prendre pour $\overrightarrow{\varepsilon}$ une version tridimentionnelle des incréments d'un mouvement brownien [2]. On peut légitimement s'interroger sur le bien fondé de ce premier choix. Les trajectoires d'un mouvement brownien étant à peine continues, cela laisse espérer pour la vitesse du flocon des trajectoires tout aussi peu régulières. En particulier, cela signifie que l'accélération du flocon traîne dans des espaces où la police ne va plus. Concrètement, cela revient à accepter tacitement que la perturbation colle dans la tronche du flocon des pains d'une force virtuellement infinie. Pas très sympa pour lui. Afin de le ménager un peu, on peut envisager de travailler avec quelque chose de moins irrégulier. Il est notamment possible de filtrer ces fameux incréments pour les adoucir. Personnellement, je serais d'avis de laisser cette piste de côté dans un premier temps. Le choix du type de filtrage introduirait dans notre modélisation un caractère arbitraire relativement désagréable.

Champ gaussien Le cas où $\overrightarrow{\varepsilon}$ dérive d'un champ spatial est plus complexe mais aussi plus riche et plus proche de la physique. Il s'agit d'établir une modélisation plus fine des courants d'air perturbateurs. De fait, ces courants ne peuvent pas être quelconques. Même s'ils sont aléatoires, il existe entre chacun de leurs points des corrélations spatio-temporelles résultant de phénomènes physiques aussi variés que les phénomènes de viscosité, de compressibilité, ou de conservation de l'énergie et de la matière. Nous ne nous étendrons sur ce cas potentiellement très compliqué mais nous donnons tout de même un des nombreux cadres d'étude envisageables. On définit un champ aléatoire gaussien $\Xi(x, y, z, t, \omega)$ (idéalement stationnaire, ω désigne la variable "évènement" de notre espace de probabilité) à valeurs dans un espace tridimensionnel réel. A tout instant t, le vecteur $\overrightarrow{\varepsilon}$ est donné par :

$$\overrightarrow{\varepsilon}(t) = \Xi\left(x(t), y(t), z(t), t, \omega\right)$$
$$\text{où } \left(x(t), y(t), z(t)\right) \text{ désigne la position du flocon à l'instant } t$$

Dans le cas où on opte pour un champ gaussien stationnaire, il faut se donner une fonction de covariance du champ entre deux points quelconques, (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) :

$$cov\left(x_1, y_1, z_1, t_1, x_2, y_2, z_2, t_2\right) = f\left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, t_2 - t_1\right)$$
$$\text{où } f \text{ est une fonction dont la transformée de Fourier est positive}$$

Champs gaussiens couplés Nous allons terminer cette étude par une présentation de ce que nous appelons les champs gaussiens couplés. En effet, les

[2]Ces incréments constituent l'analogue continu du bruit blanc discret

champs gaussiens tels que nous les avons définis dans le paragraphe précédent nous exposent à un cruel dilemme : soit nous prenons en compte les corrélations spatiales, soit nous travaillons avec des matrices de covariance de taille croissante. Dans le cas des fluides turbulents, la première option revient tout simplement à ignorer les phénomènes de création de vortex. La seconde option devient, quant à elle, synonyme à plus ou moins long terme de suicide algorithmique. Peut-on tout de même espérer trouver le salut ? Il me semble que oui et qu'une façon de l'obtenir consiste précisément à utiliser le modèle des champs gaussiens couplés. Qu'est-ce alors que ces champs gaussiens couplés ? Pourquoi couplés ?

Nous sommes partis de ce que nous savons facilement simuler : des champs gaussiens corrélés dans l'espace mais décorrélés dans le temps. Les ressources informatiques requises par la simulation de ces processus restent en effet relativement raisonnables et ne dépendent que du nombre de flocons considérés. Afin de rendre compte des corrélations temporelles, notre idée est d'appliquer à tels processus un filtrage temporel. Le processus résultant d'un tel filtrage aura par construction une double corrélation spatio-temporelle. Notre pari est d'arriver à synthétiser le champ souhaité à partir de traitements récursifs simples.

Pour bien comprendre nos choix, il convient de se rappeler de l'allure des spectres de vitesse de fluide. On peut grossièrement les décomposer en trois grandes zones :

- une zone de résonance basse fréquence, correspondant à la création de vortex,
- une zone inertielle un peu plus haute fréquence, caractérisée par des pentes de -5/3 dans la théorie de Kolmogorov,
- une zone dissipative encore plus haute fréquence, caractérisée par des pentes encore plus abruptes.

Il s'ensuit que la zone de résonance et la zone inertielle peuvent être modélisées avec une assez bonne approximation par un système différentiel oscillant du second ordre. Par suite, on peut écrire qu'en tout point (x, y, z) chaque composante $\xi(t)$ du champ $\Xi(x, y, z, t)$ vérifie une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \lambda\omega\frac{d\xi}{dt} + \omega^2\xi = dB$$

où dB désigne les incréments du mouvement brownien

N'ayant aucune raison de ne pas supposer l'espace isotrope, nous choisirons la même forme sur chacune des composantes. Reformulons l'équation différentielle sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{M}\boldsymbol{\xi} + dB\mathbf{e}_2 \\ \xi = \mathbf{e}_2^T\boldsymbol{\xi} \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi & \frac{d\xi}{dt} \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda\omega \end{bmatrix} \end{cases}$$

Notons ξ_k la valeur de la fonction vectorielle en $k\Delta T$ et intégrons l'équation matricielle entre $k\Delta T$ et $(k+1)\,\Delta T$:

$$\xi_{k+1} = e^{\Delta T\mathbf{M}}\xi_k + \int_0^{\Delta T} e^{u\mathbf{M}}\mathbf{e}_2 dB(u)$$

Il s'ensuit que, connaissant ξ_{k+1}, la moyenne de ξ_{k+1} vaut :

$$E\left(\xi_{k+1}\right) = e^{\Delta T\mathbf{M}}\xi_k$$

et que sa matrice de covariance est indépendante de k et vaut

$$\mathbf{\Sigma} = \sigma^2 \int_0^{\Delta T} e^{u\mathbf{M}}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T e^{u\mathbf{M}^T} du$$

Notons $r = -a+ib$ et $\bar{r}$ les racines de l'équation caractéristique : $X^2+\lambda\omega X+\omega^2$ et réécrivons la matrice covariance sous une forme plus explicite :

$$\mathbf{\Sigma} = \sigma^{\mathbf{2}}\mathbf{U\Phi H\Phi}^*\mathbf{U}^*$$
$$\text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r & \bar{r} \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2ib} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2ib} \end{bmatrix} \\ \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{1-e^{-2a\Delta T}}{2a} & \frac{e^{2r\Delta T}-1}{2r} \\ \frac{e^{2\bar{r}\Delta T}-1}{2\bar{r}} & \frac{1-e^{-2a\Delta T}}{2a} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

ou encore, aux erreurs de calcul près :

$$\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{4b^2}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & e^{-2a\Delta T}(1-\cos(2b\Delta T)) \\ e^{-2a\Delta T}(1-\cos(2b\Delta T)) & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$$
$$\text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{\Sigma}_{11} = \frac{1-e^{-2a\Delta T}}{a} - \frac{a\left[1-e^{-2a\Delta T}\cos(2b\Delta T)\right]}{a^2+b^2} + \frac{be^{-2a\Delta T}\sin(2b\Delta T)}{a^2+b^2} \\ \mathbf{\Sigma}_{22} = \frac{(a^2+b^2)(1-e^{-2a\Delta T})-a^2\left[1-e^{-2a\Delta T}\cos(2b\Delta T)\right]-abe^{-2a\Delta T}\sin(2b\Delta T)}{a} \end{array} \right.$$

Maintenant que nous avons explicité les statistiques temporelles, nous pouvons reprendre le cheminement de notre logique. Nous savons simuler parfaitement ξ_{k+1} à partir de ξ_k et d'un générateur aléatoire. Il nous suffit en effet pour cela de générer un bruit bidimensionnel de matrice de covariance $\mathbf{\Sigma}$ et de l'ajouter à la tendance $e^{\Delta T\mathbf{M}}\xi_{k+1}$. Si nous procédons exactement ainsi, sans précaution supplémentaire, les composantes du champ de vitesses de l'air risquent d'être spatialement décorrélées. Afin de conserver la cohérence spatiale du phénomène, nous proposons la méthode suivante ; pour chaque composante du vecteur vitesse :

1. Générer indépendamment deux jeux de $N_{flocons}$ valeurs spatialement corrélées[3] $\{\varepsilon_1^1, .., \varepsilon_{N_{flocons}}^1\}$ et $\{\varepsilon_1^2, .., \varepsilon_{N_{flocons}}^2\}$,

[3]Le choix du noyau de covariance est laissé à la discrétion du lecteur.

2. Construire un jeu de $N_{flocons}$ vecteurs aléatoires $\{\varepsilon_1, .., [\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2]^T, .., \varepsilon_{N_{flocons}}\}$,
3. Matricer chacun de ces vecteurs ε_i en $\mathbf{w}_i$ de telle sorte que les $\mathbf{w}_i$ suivent une loi $\mathcal{N}(0, \mathbf{\Sigma})$,
4. Mettre à jour les $N_{flocons}$ vecteurs d'état ξ_{k+1}^i à l'aide de l'équation d'évolution $\xi_{k+1}^i = e^{\Delta T \mathbf{M}} \xi_k^i + \mathbf{w}_i$.

Par construction, la suite de vecteurs d'état ξ_k^i possède les propriétés statistiques temporelles voulues (filtrage des incréments d'un mouvement brownien par un système résonant). Que dire de ses propriétés spatiales ? Regardons la matrice de covariance $\mathbf{S}_{k+1}^{i,j}$ du couple $\left(\xi_{k+1}^i, \xi_{k+1}^j\right)$ sachant les ξ_k^l. Cette matrice, qui traduit les corrélations spatiales de l'innovation sur les paramètres cinématiques du flocon i et du flocon j, est de la forme :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{S}_{k+1}^{i,j} & = & cov(\overrightarrow{p}_i^k, \overrightarrow{p}_j^k)\mathbf{\Sigma} \\ \text{où} & & \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{p}_i^k \text{ dé signe les positions du i-}\mathit{ième}\text{ flocons à l'instant } k\Delta T \\ cov(\overrightarrow{p}_i, \overrightarrow{p}_j) \text{ est une fonction de covariance quelconque} \end{array} \right. \end{array}$$

On constate donc que cette innovation possède bien la structure spatio-temporelle voulue.

2.3.3 Le flocon stationnaire

A moins de prendre en compte le flocon depuis sa formation dans les nuages, il est relativement irréaliste de supposer que le flocon démarre avec une vitesse nulle. On peut même s'attendre à ce que dans l'écran de visualisation le flocon ait déjà atteint son régime stationnaire. Aussi convient-il d'initialiser les paramètres cinématiques du flocon en conséquence. Autrement dit, l'objectif est ici de déterminer les caractéristiques statistiques du vecteur vitesse en régime stationnaire. Nous nous contenterons en pratique des moments d'ordre deux. Une fois que nous les aurons déterminés, nous pourrons les utiliser pour générer autant de fois que nécessaire le vecteur de vitesse initiale du flocon entrant dans le champ de vision du joueur. Il suffira par exemple pour cela de choisir une statistique gaussienne des vitesses. Par commodité, nous considèrerons soit que la partie non linéaire des frottements est faible soit que les perturbations sont négligeables. Par ailleurs, nous nous placerons dans le cadre où la perbutation est modélisée par un processus stochastique temporel simple. La vitesse moyenne $\vec{v}_l$ du flocon vérifie alors :

$$\alpha(v_l)\vec{v}_l = m\overrightarrow{g}$$

soit encore, en notant $\vec{e}_z$ le vecteur vertical orienté vers le bas :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{v}_l = v_l \overrightarrow{e}_z \\ \alpha(v_l)v_l = mg \end{array} \right.$$

On peut supprimer le poids de l'équation dynamique :

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = \frac{1}{m}\left(\alpha(v_l)\overrightarrow{v}_l - \alpha(v)\overrightarrow{v}\right) + \overrightarrow{\varepsilon}$$

En développant la perturbation au premier ordre en décomposant $\overrightarrow{v}$ en $\overrightarrow{v}_l + \overrightarrow{u}$, on obtient :

$$v \simeq v_l(1 + \frac{1}{v_l^2}\overrightarrow{v_l}.\overrightarrow{u})$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} \simeq \frac{-1}{m}\left(\alpha(v_l)\overrightarrow{u} + \mu\frac{\overrightarrow{v_l}.\overrightarrow{u}}{v_l}\overrightarrow{v_l}\right) + \overrightarrow{\varepsilon}$$

En notant $\overrightarrow{u}_k$ la valeur de $\overrightarrow{u}$ à l'instant $k\Delta T$, on aboutit par discrétisation au système suivant :

$$\overrightarrow{u}_{k+1} = (1 - \frac{\Delta T}{m}\alpha(v_l))\overrightarrow{u}_k - \mu\frac{\Delta T}{m}\frac{\overrightarrow{v_l}.\overrightarrow{u}_k}{v_l}\overrightarrow{v_l} + \frac{\sqrt{\Delta T}}{m}\overrightarrow{\varepsilon}_k$$

On en déduit que la matrice de covariance de $\overrightarrow{u}_k$, $\mathbf{\Gamma}_k = E\left(\overrightarrow{u}_k\overrightarrow{u}_k^T\right)$, vérifie au premier ordre en ΔT :

$$\mathbf{\Gamma}_{k+1} = \left(1 - \frac{2\Delta T}{m}\alpha(v_l)\right)\mathbf{\Gamma}_k - \mu\frac{\Delta T}{m}v_l\left(\mathbf{\Gamma}_k\overrightarrow{e}_z\overrightarrow{e_z}^T + \overrightarrow{e}_z\overrightarrow{e}_z^T\mathbf{\Gamma}_k\right) + \frac{\Delta T}{m^2}\mathbf{G}$$

où $\mathbf{G} = E\left(\overrightarrow{\varepsilon}\overrightarrow{\varepsilon}^T\right)$

Le flocon stationnaire ayant une matrice de covariance indépendante du temps $\mathbf{\Gamma}$, celle-ci vérifie nécessairement :

$$\mathbf{G} = 2m\alpha(v_l)\mathbf{\Gamma} + m\mu v_l\left(\mathbf{\Gamma}\overrightarrow{e}_Z\overrightarrow{e_Z}^T + \overrightarrow{e}_Z\overrightarrow{e}_Z^T\mathbf{\Gamma}\right)$$

Il s'ensuit que Γ est de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{\Gamma}(i,j) = \frac{1}{2m\alpha(v_l)}\mathbf{G}(i,j) & \text{si } i,j < 3 \\ \mathbf{\Gamma}(i,3) = \frac{1}{2m\alpha(v_l)+m\mu v_l}\mathbf{G}(i,3) & \text{si } i < 3 \\ \mathbf{\Gamma}(3,3) = \frac{1}{2m\alpha(v_l)+2m\mu v_l}\mathbf{G}(3,3) & \end{cases}$$

avec la convention de placer la composante verticale en troisième position.

3 La tempête

Maintenant que nous avons vu comment simuler un flocon par temps calme, il ne nous reste plus qu'à nous intéresser à la problématique de la tempête. Pour cela, nous allons partir des diverses solutions déjà proposées et voir comment les raffiner pour donner une effet de souffle et de mouvement à la scène.

3.1 Dynamique de la tempête

En reprenant les notations du paragraphe 2.2, on obtient dans le repère fixe de l'observateur :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\overrightarrow{g} - \alpha(|\overrightarrow{v} - \vec{v}_s|)\,(\overrightarrow{v} - \vec{v}_s) + \overrightarrow{\varepsilon} \tag{3}$$

Les frottements étant exercés par l'air, il semble logique de les exprimer en fonction de la vitesse relative $\overrightarrow{v} - \vec{v}_s$ du flocon par rapport à l'air en mouvement.

3.2 La tempête galiléenne

C'est typiquement le cas d'école. Si le vent souffle de façon constante et uniforme alors dans le référentiel du vent le flocon suit les équations du temps calme. Il suffit donc de résoudre le problème dans le repère en mouvement et de le transposer par translation dans le repère fixe. On peut décemment penser que dans ce cas la pertubation a une variance plus forte dans la direction du vent. Aussi, plutôt que de prendre une matrice de covariance $\mathbf{G} = E\left(\overrightarrow{\varepsilon}\,\overrightarrow{\varepsilon}^T\right) = \sigma^2\mathbf{Id}$, il serait envisageable de choisir :

$$\mathbf{G} = \sigma^2\left(\mathbf{Id} + \frac{1}{v_s v_l}\overrightarrow{v}_s\overrightarrow{v}_s^T\right)$$

où $\overrightarrow{v}_s$ désigne la vitesse du souffle

Si le champ des vitesses est presque uniforme et constant alors on pourra considérer que la tempête est pseudo galiléenne. Dans le cas contraire, il faudra revenir aux perturbations dérivant d'un champ gaussien.

3.3 Tempêtes fortement non galiléennes

La présence de tourbillons dans la tempête atteste par exemple de corrélation spatiales complexes peu compatibles avec l'hypothèse galiléenne. L'approche par champs gaussiens évoquée au paragraphe 2.3.2 fournit un cadre théorique puissant pour introduire ce type de phénomènes. Il suffit alors pour avoir la dynamique du flocon de synthétiser $\overrightarrow{\varepsilon}$ à partir de la structure choisie pour le champ et de faire évoluer la vitesse selon l'équation (3). L'ennui avec cette méthode, c'est qu'a priori il faut se coltiner des produits de matrices dont la taille est au moins égale au nombre de flocons. Si on souhaite prendre en compte les corrélations temporelles, les matrices en question peuvent encore largement gonfler. Il n'est hélas pas toujours possible de se le permettre. Ajoutons que la détermination de la structure de champ appropriée reste une étape tout à fait cruciale et fort délicate. Il est donc conseillé de ne se tourner vers ce type d'approches qu'après avoir épuisé toutes les ressources des tempêtes pseudo-galiléennes.

4 Expédients algorithmiques

4.1 Topologie torique

Nous discutons dans ce chapitre d'un expédient pour réaliser à moindre frais une sympathique petite tempête. L'idée consiste à plonger le point de vue de l'observateur dans un espace torique légèrement plus grand. Je m'explique parce que je sens que vous avez décroché. Dissipons d'abord une source de confusion possible. Non, la topologie torique n'est pas la science qui étudie les différentes façons de déloger une taupe à coups de marteau. Maintenant que nous avons précisé ce que ce n'était pas, il ne nous reste plus qu' à dire ce que c'est. Commençons d'abord par considérer la scène vue par l'observateur. On peut l'assimiler grossièrement à un pavé de largeur Lx, de profondeur Ly et de hauteur Lz. L'idée de la topologie torique c'est de dire que tout ce qui sort par la droite revient par la gauche, tout ce qui sort par le sol resurgit par le plafond, et tous les flocons qui partent derrière l'observateur sont réinjectés à l'horizon. Voilà donc la version du pauvre. L'avantage de la manoeuvre, c'est qu'on travaille à nombre de flocons constant, qu'aucune discontinuité n'apparaît et qu'on construit artificiellement un espace infini à partir d'une collection finie d'objets simples. On peut aussi voir cette topologie comme une périodisation du pavé d'observation, répliqué à l'infini dans toutes les directions.

Le problème qui pourrait apparaître avec cette technique serait que l'observateur repère les passerelles établies entre les différents horizons opposés. Pour y remédier, il suffit d'élargir l'espace périodisé. Ainsi, au lieu de choisir le pavé d'observation strict, on considère un pavé plus grand qui l'englobe et on applique les repliements toriques à cet espace englobant. Il est probable que les dimensions du grand pavé gagneraient à tenir compte de la vitesse du vent. Typiquement, si la tempête souffle fort, le grand pavé va rapidement traverser l'écran d'observation et réapparaître en partie à un autre bout. Si le volume transféré de droite à gauche devient trop important alors l'observateur humain va finir par établir la corrélation et le charme risque d'être rompu. Inversement plus le mouvement d'ensemble sera lent plus la part de flocons téléportés sera faible et moins le joueur aura de chances de détecter les ficelles.

4.2 Vers un tore quadridimensionnel

La section précédente a présenté une ruse permettant de simuler une tempête étendue à l'aide d'une tempête localisée munie d'une géométrie torique. Il s'agissait en fait d'agrandir artificiellement les dimensions spatiales de notre espace d'observation à l'aide de symétries judicieuses. On pourrait rapprocher cette démarche de l'astuce utilisée par certains restaurateurs peu scrupuleux qui n'hésitent à couvrir leurs murs de miroir pour donner une impression de gigantisme à leur établissement. Comme l'a fort justement fait remarquer Thierry[4], ce qui a été appliqué au domaine spatial devrait aussi pouvoir se transposer dans le modèle temporel. Toutefois, un problème des plus délicats se pose : pour boucler continûment dans le temps il faut que la situation de début et la situation de fin soient compatibles. Or pour l'instant, cela n'a aucune raison d'être le cas. Voyons comment nous y ramener.

Comme nous venons de le dire, l'impression de continuité impose de se ramener au début et à la fin de chaque séquence à une même situation de référence. Une situation de référence assez naturelle est : plus aucun flocon à l'écran. Ce serait la séquence type. A l'instant initial, l'écran est exempt de tout flocon. Il commence alors à neiger : les flocons envahissent l'espace au rythme de N/seconde. De par son caractère torique, l'espace est un piège à flocon : impossible pour eux d'en sortir. Aussi le nombre de flocons augmente-t-il linéairement avec le temps. Vient alors la seconde phase, dite de régime permanent. Pas de création ni de disparition de flocon. Cette phase doit être suffisamment longue pour que le premier flocon créé ait eu le temps d'arriver en bas de l'espace de travail. S'ensuit alors la troisième phase, dite de déclin, au cours de laquelle tout flocon atteignant la frontière basse de l'espace est impitoyablement dézingué. Si tout a été effectué dans les règles de l'art (en particulier l'initialisation cinématique du flocon), la vitesse de décroissance des flocons devrait être en moyenne égale à N, cadence de création de la première phase. Aussi pour obtenir une densité de flocons constante suffit-il de superposer les séquences de telle sorte que le début de la phase 3 de la séquence i coïncide au début de la phase 1 de la séquence i+1.

Personne ne viendra, je l'espère, m'ennuyer avec les effets de bord. Reconnaissez qu'ils ne méritent pas tellement qu'on s'y attarde. Un simple fenêtrage et leur triste sort est réglé.

4.3 Remarques diverses sur l'affichage

Abordons enfin la question du rendu optique. Classiquement les mouvements d'éloignement et de rapprochement du flocon devraient s'accompagner respectivement d'un rapetissement et d'un grossissement de l'image de ce même flocon à l'écran. Il peut également être intéressant de lui imprimer des mouvements de rotation aléatoires ou de déterminer ces derniers en tenant compte du fait que le flocon s'oriente toujours de façon à minimiser sa surface exposée aux courants d'air.

5 Conclusion

Nous avons proposé différents modèles comportementaux pour simuler une tempête de neige. Certains n'ont été évoqués qu'à titre de pistes, d'autres ont

[4]cf. *plates excuses et flocons de neige stochastiques* de la liste de diffusion ragondinsforever@yahoo.com

été soigneusement détaillés. Avant de chercher à développer les méthodes les plus complexes, il conviendrait de programmer déjà les plus simples et d'évaluer leurs performances. Alors, amis programmeurs, c'est à vous de jouer ! A vos claviers !